Дәріс 1

Математикалық физика есебі, оның қойылуы. Дербес туындылы теңдеулер ұғымы, оның түрлері, шешу әдістері

R^n- Евклит кеңістігі, нүкте $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$ шектелген аймақта. Белгісіз функция $u = u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ сол аймақта дифференциалданады, оның туындыларын

$$Du = u_{xj} = \frac{\partial u(x)}{\partial x_j},$$

$$D^2 u = u_{x x_j} = \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j}, ..., D^k u = \frac{\partial^{|k|} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}$$

түрінде белгілейік.

1-анықтама. Көп аргументті белгісіз $u = u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция және оның туындыларын байланыстыратын теңдеуді дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп атайды оның жалпы түрі

$$F(x, u(x), Du, ..., D^k u, ...) = 0 \quad \text{к=1,2,...} \qquad (1)$$

Мұнда $D^m u(x)$ бойынша туындылардың ең болмағанда біреуі нөһлге тең емес:

$$\frac{\partial F}{\partial (D^m u)} \neq 0, \sum_{i=1}^{n} k_i = m$$

2-анықтама. Дифференциалдық теңдеудегі туындылардың ең үлкен реті m, осы теңдеудің реті деп аталады.

3-анықтама. Егер $\overline{F} = (F_1, F_2, ..., F_N)$ -N өлшемді ал, $\overline{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)$ -m векторлар болса, онда (1)-дербес туындылы теңдеулер жүйесі деп аталады.

4-анықтама. Функция $u(x) \in C^m(\Omega)$ және (1) теңдеуді қанағаттандырса, онда ол функцияны (1) теңдеудің регулярлық шешімі деп аталады.

Дифференциалдық теңдеудің регулярлы емес (ерекше нүктелері бар) шешімдері және жеткілікті ретті дифференциалданбайтын (жалпылама) шешімдері болады.

Мысалы, ерекше нүктелері бар шешімдерге іргелі шешімдер жатады.
Қолданбалы математика мен техникада кездесетін дифференциалдық теңдеулердің шешімлері шексіз көп. Бірақта нақты шешімдері жоқ немесе жалғыз болатын дифференциал теңдеулер кездеседі.

5-анықтама. Егер (1)-теңдеудегі функция F барлық $D^k u, 0 \leq k \leq m$ туындыларға сызықты тәуелді болса, онда (1) теңдеуді сызықты дифференциал теңдеу деп атайды.

Мысалы, екінші ретті дербес туындылы сызықты дифференциалдық теңдеу мына түрде

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u(x) = f(x) \qquad (2)$$

жазылады, мұндағы $a_{ij}(x)$,$b_i(x)$,c(x)-коэффициенттері мен f(x)-бос мүше $\Omega \in R^n$ аймақта анықталған белгілі нақты функциялар.

Егер теңдеудегі коэффициенттер тұрақты сандар болса, онда (2)-теңдеуді біртектес, ал $f \neq 0$ болса, біртектес емес деп атайды.

6-анықтама. Егерде (2)-теңдеудің $a_{ij}(x)$ коэффициенттері мен бос мүше белгісіз u(x) пен оның бірінші ретті туындыларына тәуелді болса, яғни (2)-теңдеу мына түрде

$$\sum a_{ij}(x, u, ..., u_x, ...) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = F(x, u, u_x, ...) \qquad (3)$$

болса, онда (3)-теңдеуді квазисызықтық деп атайды.

7-анықтама. Егерде (3)-теңдеудің коэффициенттері $a_{ij}(x)$ болса, онда оны жоғары ретті туындыларына салыстырғанда сызықты немесе жартылай сызықты деп атайды.

Қалған жағдайларда теңдеулер сызықты деп аталады.